УДК 621.391

# РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА. Ч. I.

Ю.Е. Воскобойников*, Ю.Н. Исаев, В.А. Литасов*, В.А. Колчанова, Е.О. Кулешова

Томский политехнический университет
* Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет
E-mail: voscob@mail.ru, isaev_yusup@mail.ru

*Предлагается новый алгоритм идентификации параметров эквивалентной схемы замещения электрического разряда. Подход основан на решении интегрального уравнения I рода относительно функции переходной проводимости, по которой затем происходит определение параметров схемы замещения. Использование сглаживающих сплайнов и оригинального регуляризирующего алгоритма, учитывающего погрешности задания ядра интегрального уравнения позволило получить устойчивый алгоритм идентификации параметров. Проведенные исследования алгоритма показали высокую вычислительную эффективность и хорошую точность идентификации параметров.*

## 1. Введение

Одно из наиболее интересных с физической точки зрения и практически важных направлений в различных областях техники является барьерный разряд. В частности барьерный разряд используется для очистки воды, плазменных технологий, травления и т. д. Однако сильная пространственная неоднородность и малая длительность физических процессов, протекающих в барьерном разряде, крайне затрудняет изучение этого явления.

При феноменологическом описании электрических разрядов (в частности и барьерного разряда) широко используется их описание как объектов электрической цепи [1]. В основе таких подходов лежит замена электрофизических явлений, происходящих в разряде, явлениями, происходящими в электрической цепи, состоящей из определенных электрических элементов (сопротивления, емкости, индуктивности). Такую электрическую цепь будем называть эквивалентной схемой замещения электрического разряда.

При исследовании физики разрядов доступными для измерения являются напряжение $U(t)$ и ток $I(t)$ в цепи с разрядным промежутком. Поэтому возникает задача определения параметров эквивалентной схемы замещения по зарегистрированным значениям функций $U(t)$, $I(t)$. По сути, имеем задачу идентификации параметров эквивалентной схемы замещения.

В работах [2, 3] значения параметров находятся по переходной проводимости $g(t)$. В свою очередь функция $g(t)$ определяется как решение интегрального уравнения-свертки Вольтера I рода, что является некорректно поставленной задачей [4, 5]. Однако в этих работах не учитывается ряд важных моментов, связанных с решением этой некорректно поставленной задачи, что отрицательно сказалось на точности идентификации параметров. К таким моментам можно отнести: недостаточная устойчивость используемого алгоритма дифференцируемого зашумленной функции $U(t)$ при вычислении ядра интегрального уравнения; не учет случайной погрешности задания ядра уравнения, как на этапе построения регуляризированного решения, так и при выборе параметра регуляризации.

Поэтому в данной работе предполагается устойчивый алгоритм идентификации параметров схемы замещения, основанный на регуляризирующем алгоритме решения интегрального уравнения-свертки с неточно заданным ядром [6] и в полной мере учитывающей вышеназванные моменты.

## 2. Постановка задачи

Если действующее в цепи напряжение имеет импульсную форму, то переходный процесс, происходящий в разрядном промежутке в терминах $U(t)$ и $I(t)$ удобно описать с помощью интеграла Дюамеля [7]. Если действующее напряжение $U(t)$ является финитной функцией, т. е. вне интервала $[0, T_U]$ обращается в нуль, то для тока в цепи справедливо выражение

$$I(t) = U(0)g(t) + \int_0^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} g(t-\tau)d\tau,$$

где $g(t)$ – переходная проводимость. Как правило, значение $U(0)=0$ и поэтому приходим к интегральному уравнению-свертки Вольтерра I рода:

$$I(t) = \int_0^t g(t-\tau)\frac{dU(\tau)}{d\tau}d\tau. \qquad (1)$$

Функцию $g(t-\tau)$ называют ядром интегрального уравнения, $I(t)$ – правой частью уравнения.

Интегральное уравнение (1) необходимо решить относительно функции $g(t)$, что является некорректно поставленной задачей, а затем по функции $g(t)$ определить параметры эквивалентной схемы замещения электрического разряда.

Таким образом, задача идентификации параметров эквивалентной схемы замещения включает следующие этапы:

Этап 1. Вычисление производной $\dfrac{dU(\tau)}{d\tau}$ по измеренным (с погрешностями) значениям функции $U(t)$.

Этап 2. Решение интегрального уравнения (1) относительно функции $g(t)$.

Этап 3. Определение (возможно и по виду функции $g(t)$) структуры эквивалентной схемы замещения и параметризации функции $g(t)$.

Этап 4. Оценивание параметров функции $g(t)$ и вычисление по этим оценкам величин сопротивлений, емкостей и индуктивностей, входящих в эквивалентную схему замещения.

Решение сформулированной задачи идентификации будем рассматривать при следующих предположениях:

1. Функция $U(t)$ отлична от нуля на интервале $(0, T_U]$ (т. е. является финитной) и измеряется на этом интервале в моменты $t_j=\Delta\cdot j$, $j=0,1,...,N_U-1$, где $N_U=\text{ent}[T_U/\Delta]+1$, $\Delta$ – шаг дискретизации, ent$[z]$ – целая часть вещественного числа $z$. Измеренные значения $\tilde{U}_j$ допускают представление

$$\tilde{U}_j = U(j\Delta)+\zeta_j, \quad j=0,1,...,N_U-1,$$

где $\zeta_j$ – случайные величины с математическим ожиданием $M(\zeta_j)=0$, дисперсией $D(\zeta_j)=\delta_\zeta^2$ и отображающие погрешности измерения напряжения.

2. Функция $g(t)$ отличается от нуля на интервале $[0, T_g]$.

При этих предположениях функция $I(t)$ является финитной с интервалом определения $[0, T_I]$, где $T_I=T_U+T_g$.

3. Функция $I(t)$ измеряется на интервале $[0, T_I]$ в моменты $t_j=\Delta\cdot j$, $j=0,1,...,N_I-1$, где $N_I=\text{ent}[T_I/\Delta]+1$. Измеренные значения допускают представление

$$\tilde{I}_j = I(t_j)+\eta_j, \quad j=0,1,...,N_I-1,$$

где $\eta_j$ – случайные величины с числовыми характеристиками $M(\eta_j)=0$, $D(\eta_j)=\delta_\eta^2$.

Кратко остановимся на алгоритмах решения каждого этапа рассматриваемой задачи идентификации параметров эквивалентной схемы замещения.

### 3. Вычисление производной по измеренным значениям напряжения

Ядром интегрального уравнения (2) является производная $\frac{dU(t)}{d\tau}$ напряжения $U(t)$. Известно, что операция дифференцирования является некорректно поставленной задачей (в частности малые ошибки могут вызвать сколь угодно большие ошибки в производной).

Для устойчивого дифференцирования функции $U(t)$, заданной измеренными в моменты значениями $\tilde{U}(t_j)$ в качестве приближения для $U(t)$ примем *сглаживающий кубический сплайн* (СКС) $S_\lambda(t)$. Напомним, что кубическим сглаживающим сплайном называется кубический полином, удовлетворяющий условиям:

1. На каждом интервале $[t_j, t_{j+1}]$ $S_\lambda(t)$ имеет следующее представление

$$S_\lambda(t) = a_j + b_j(t-t_j)+c_j(t-t_j)^2+d_j(t-t_j)^3,$$

где $t_j<t<t_{j+1}$.

2. Функция $S_\lambda(t)$ имеет непрерывную вторую производную на всем отрезке $[0, T_U]$.

Вычисление коэффициентов $a_j$, $b_j$, $c_j$, $d_j$ СКС (которые зависят от *параметров сглаживания* $\lambda$) подробно изложено в работах [5, 8] и для их однозначного вычисления примем *краевые условия* вида:

$$S_\lambda{}'(0)=0; \; S_\lambda{}'(T_U)=0. \tag{2}$$

Эти условия соответствуют типичной форме импульса напряжения $U(t)$ (см. рисунок). Можно показать, что СКС с условиями (2) доставляет минимум функционалу

$$\int_0^{T_U} (f''(t))^2 dt + \lambda \cdot \sum_{j=0}^{N_u-1} p_j (f(t_j)-\tilde{U}_j)^2$$

среди всех функций $f(t)$ с интегрируемым квадратом второй производной и удовлетворяющих условию (2).

После вычисления коэффициентов СКС первую производную $S'_\lambda(t)$ (являющуюся оценкой для производной $\frac{dU(t)}{d\tau}$) можно вычислить по формуле

$$S_\lambda{}'(t) = b_j + 2c_j(t-t_j)+3d_j(t-t_j)^2, \tag{3}$$

где $t_j<t<t_{j+1}$.

Основной сложностью при построении СКС является выбор параметра сглаживания $\lambda$, который может изменяться в пределах от 0 (сглаживающий сплайн становиться интерполяционным, проходящим через значения $\tilde{U}_j$, т. е. $S_0(t_j)=\tilde{U}_j$) до $\infty$ (СКС становиться прямой линией). Если $\lambda$ окажется малым, то в сплайне будут присутствовать высокочастотные составляющие, обусловленные погрешностями $\zeta_j$, которые будут особенно проявляться в производных сплайна в виде высокочастотных осцилляций. Если этот параметр будут слишком большим, построенный сплайн окажется «переглаженный» и в нем будут сильно сглажены передний и задний фронты импульса $U(t)$, что отрицательно скажется на точности вычисления первой производной.

Можно выделить два подхода к выбору параметра $\lambda$: оценивания $\lambda$ из условия минимума среднеквадратичной ошибкой сглаживания [5] и выбор $\lambda$ по точностным характеристикам сплайна [9]. Остановимся на втором подходе, более подходящем для решаемой задачи дифференцирования $U(t)$.

В этом подходе сглаживающий сплайн интерпретируется как выходной сигнал некоторого фильтра (сплайн-фильтра), на вход которого поступает дискретная последовательность, состоящая из измеренных значений $\tilde{U}_j$ функции $U(t)$. При такой трактовке сглаживающие свойства сплайна можно определить через его *аппаратную функцию* $h_\lambda(t)$, которая характеризует систематическую ошибку сглаживания и дифференцирования: чем меньше «ширина» функции $h_\lambda(t)$, тем меньше систематическая ошибка. В качестве числовой характеристики аппаратной функции принимается ее ширина $\Delta_h(\lambda)$:

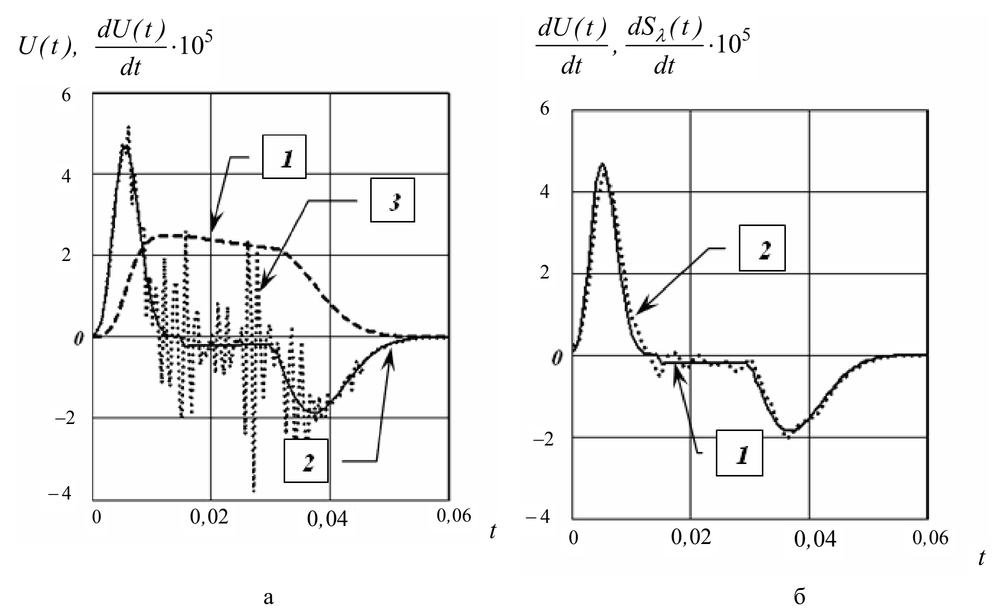



***Рисунок.*** *Вычисление производных функции U(t)*

$$\Delta_h(\lambda) = \frac{\int_0^\infty |h_\lambda(t)|\,dt}{h_\lambda(0)}.$$

Физическая трактовка этой характеристики для задачи дифференцирования достаточно проста: в сглаживающем сплайне и его производной сохраняются (с небольшими амплитудными искажениями) составляющие функции $U(t)$ и производной $U'(t)$, если их ширина больше ширины аппаратной функции $h_\lambda(t)$. Задавая «предельный» размер $\Delta_{np}$ составляющих, которые должны сохраниться в сплайне, значение $\lambda$ можно определить из решения нелинейного уравнения:

$$\Delta_h(\lambda) = \Delta_{np}. \quad (4)$$

Аппаратная функция $h_\lambda(t)$ вычисляется по формуле

$$h_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_\lambda(\omega) e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Частотная характеристика $H_\lambda(\omega)$ сплайна, определяется выражением [9]

$$H_\lambda(\omega) = \\ = \frac{2}{\Delta\omega^2}\left(\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2 \left[\frac{1-\cos(\omega\Delta)}{q_0 + 2q_1\cos(\omega\Delta) + 2q_2\cos(2\omega\Delta)}\right],$$

где $q_0 = \frac{2\Delta}{3} + \frac{6\lambda p}{\Delta^2}$; $q_1 = \frac{\Delta}{6} - \frac{4\lambda p}{\Delta^2}$; $q_2 = \frac{\lambda p}{\Delta^2}$; $p_j = p$ – весовые множители функционала, $\Delta$ – шаг дискретизации.

Проиллюстрируем изложенный подход к выбору параметра сглаживания $\lambda$ результатами следующего вычислительного эксперимента. На рисунке, *а*, показан график функции $100U(t)$ (кривая 1) и ее «точной» производной $\frac{d}{dt}U(t)$ (кривая 2). Значения функции умножаются на 100 для того, чтобы в масштабе рисунка эта функция отличалась от нуля. Кривая 3 соответствует производной интегрального сплайна $S_0(t)$, построенного по измеренным (с погрешностью) значениям $\tilde{U}_j, j=1,2,...,N_U=240$. Относительный уровень погрешностей $\zeta_j$ задавался равным 0,05. На рисунке, *б*, показан график «точной» производной $\frac{dU(t)}{d\tau}$ и значения производной, вычисленной по интерполяционному кубическому сплайну. Видны значительные осцилляции этой производной, характерные для дифференцирования неточно заданных функций. На рисунке, *б*, приведен график производной $\frac{dU(t)}{d\tau}$ и значения производной $S_\lambda'(t)$, вычисленной по сглаживающему кубическому сплайну $S_\lambda(t)$, см. (3). Видно достаточно хорошее (по сравнению с производной интерполяционного сплайна) совпадение этих производных.

Параметр сглаживания выбирается из решения ур. (4) при $\Delta_{np}=5\cdot 10^{-3}$ с (интервал дискретизации $\Delta_{np}=2{,}5\cdot 10^{-4}$ с). Величина $\Delta_{np}$ задавалась равной половине ширины переднего фронта импульса напряжения $U(t)$, что позволило в производной $S_\lambda'(t)$ сохранить «тонкие» детали производной $U(t)$ (в частности на интервале [0, 0.01]). Небольшие колебания $S_\lambda'(t)$ производной на интервале [0.01, 0.03] будут на втором этапе интерпретирования как погрешности задания ядра интегрального уравнения и будут учтены при построении регуляризированного решения этого интегрального уравнения. Для этого представим значения производной сплайна $S_\lambda'(t)$ в узлах $t_j$ в виде:

$$S_\lambda'(t_j) = \frac{d}{dt}U(t)\Big|_{t=t_j} + \xi_j,\ j = 0,1,...,N_U - 1.$$

Случайные величины $\xi_j$ отображают ошибки в вычислении производной по сглаживающему сплайну $S_\lambda(t)$. Если погрешности $\zeta_j$ измерения $U(t_j)$ имеют одинаковую дисперсию, то случайные ошибки дифференцирования также имеют дисперсию $D(\xi_j)=\sigma_\xi^2$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Самойлович В.И., Гибалов К.В., Козлов В.К. Физическая химия барьерного разряда. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 360 с.
2. Исаев Ю.Н., Колчанова В.А. Алгоритм определения параметров электротехнической схемы замещения озонатора при воздействии импульсного напряжения // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309. – № 1. – С. 59–65.
3. Исаев Ю.Н., Колчанова В.А., Хохлова Т.Е. Определение параметров двухполюсника при воздействии импульсного напряжения // Электричество. – 2003. – № 11. – С. 64–67.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 285 с.
5. Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. – Новосибирск: Наука, 1984. – 238 с.
6. Воскобойников Ю.Е., Литасов В.А. Регуляризирующий алгоритм непараметрической идентификации при неточных исходных данных // Научный вестник НГТУ. – 2005. – № 2(20). – С. 33–45.
7. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Гардарики, 1999. – 638 с.
8. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 321 с.
9. Воскобойников Ю.Е. Частотный подход к оценке точности сглаживания и дифференцирования экспериментальных данных на основе сглаживающих сплайнов // Автометрия. – 1986. – № 1. – С. 38–43.


*Поступила 18.07.2006 г.*

УДК 621.315.592